

#### SOLUÇÕES DAS QUESTÕES

1) Mostre que a equação  $(2003 + 0,1^{2004})x^2 - (2004 + 0,1^{2003})x + 1 = 0$  possui uma raiz menor do que 1 e outra maior do que 1.

**1ª Solução:** Seja  $p(x)$  o polinômio dado por  $p(x) = (2003 + 0,1^{2004})x^2 - (2004 + 0,1^{2003})x + 1$ .

Então  $p(0) = 1 > 0$ ,  $p(1) = 0,1^{2004} - 0,1^{2003} < 0$  e  $p(2) = 4005 + 4 \cdot 0,1^{2004} - 2 \cdot 0,1^{2003} > 0$ .

Logo  $p(x)$  possui uma raiz no intervalo  $(0,1)$  e outra no intervalo  $(1,2)$ .

**2ª Solução:** Temos  $\Delta = (2004 + 0,1^{2003})^2 - 4(2003 + 0,1^{2004}) = 4.008004 + 4007,6 \cdot 0,1^{2003} + 0,1^{4006} > 0$ .

Como o coeficiente do termo de segundo grau é positivo e  $\Delta > 0$ , essa equação possui duas raízes reais.

O produto das raízes é  $\frac{1}{2003 + 0,1^{2004}} < 1$  e a soma das raízes é  $\frac{2004 + 0,1^{2003}}{2003 + 0,1^{2004}} > 1$ .

Logo uma raiz deve ser positiva e menor do que 1 e a outra maior do que 1.

2) Ache todos os números inteiros positivos  $a$  e  $b$  que satisfazem a equação  $ab - a - b = 12$ .

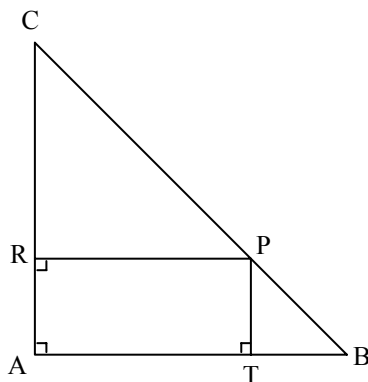
**Solução:** As únicas soluções são  $a = 2$  e  $b = 14$ , ou  $a = 14$  e  $b = 2$ .

Com efeito, se  $ab - a - b = 12$  então  $a(b-1) = b + 12$ . Logo

$$a = \frac{(b+12)}{(b-1)} = \frac{(b-1)+13}{(b-1)} = 1 + \frac{13}{(b-1)}.$$

Assim  $b-1$  é um divisor de 13. Portanto  $b-1=1$  ou  $b-1=13$ , isto é,  $b=2$  e  $a=14$ , ou  $b=14$  e  $a=2$ .

3) Seja  $ABC$  um triângulo retângulo isósceles de lados  $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ . Seja  $P$  um ponto sobre a hipotenusa  $BC$ . Sejam  $R$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre o lado  $AC$  e seja  $T$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre o lado  $AB$ . Sejam  $S_1$  a área do triângulo  $CPR$ ,  $S_2$  a área do triângulo  $PBT$  e  $S_3$  a área do retângulo  $PTAR$ . Mostre que uma das três áreas  $S_1$ ,  $S_2$  ou  $S_3$  é maior ou igual a  $\frac{2}{9}$ , não importa onde o ponto  $P$  esteja localizado.



**Solução:**

Seja  $\overline{AT} = x$  e  $y = \overline{AR} = \overline{TP} = \overline{TB} = 1 - x$ . Então a área do triângulo  $CPR$ , a área do retângulo  $PTAR$  e área do triângulo  $PBT$  são respectivamente iguais a

$$S_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad S_2 = \frac{1}{2}(1-x)^2 \quad \text{e} \quad S_3 = x(1-x).$$

Supondo que  $S_1 < \frac{2}{9}$  e  $S_2 < \frac{2}{9}$ , vamos mostrar que teremos  $S_3 \geq \frac{2}{9}$ .

Com efeito, se  $S_1 < \frac{2}{9}$  e  $S_2 < \frac{2}{9}$ , então  $\frac{1}{2}x^2 < \frac{2}{9}$  e  $\frac{1}{2}(1-x)^2 < \frac{2}{9}$ .

Dessas igualdades concluímos que  $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ . Como o gráfico da função  $S_3 = x(1-x)$  é um arco de parábola côncava para baixo, com um máximo no vértice em  $x = \frac{1}{2}$  e assumindo um mínimo  $\frac{2}{9}$  nos pontos  $x = \frac{1}{3}$  e  $x = \frac{2}{3}$ . Portanto, para

$\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$  se  $S_3 = x(1-x) > \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$ , como queríamos.

4) Mostre que não existem números inteiros positivos  $x$  e  $y$  tais que  $x^3 + 7^3 = y^3$ .

**Solução:** Supondo que a equação  $x^3 + 7^3 = y^3$  tenha uma solução inteira  $(x,y)$ , então

$$7^3 = y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + yx + x^2).$$

Mas  $0 < y - x < y < y^2 + yx + x^2$ , logo as únicas possibilidades são

$$y - x = 1 \text{ e } y^2 + yx + x^2 = 7^3 \text{ ou}$$

$$y - x = 7 \text{ e } y^2 + yx + x^2 = 7^2.$$

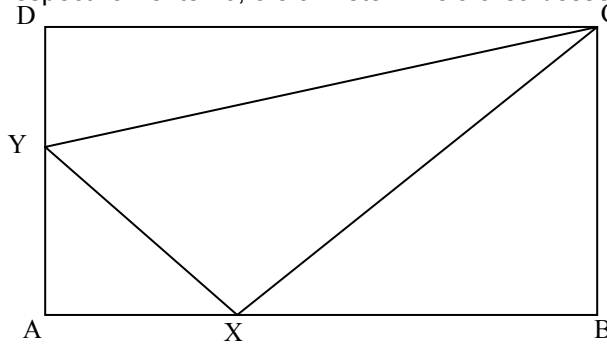
No primeiro caso  $y - x = 1$ , que fornece

$$7^3 = y^2 + yx + x^2 = (y-x)^2 + 3xy = 1 + 3xy.$$

Daí,  $3xy = 7^3 - 1 = 342$ , isto é  $x(x+1) = xy = 114$ . Mas o número  $114 = 2 \cdot 3 \cdot 19$  não é um produto de dois inteiros consecutivos. No segundo caso  $y > 7$ , logo  $y^2 + yx + x^2 > 7^2$ , o que é um absurdo.

Portanto a equação não admite soluções inteiras.

5) Num retângulo  $ABCD$ , sejam  $X$  um ponto no lado  $AB$  e  $Y$  um ponto no lado  $AD$ . Suponha que as áreas dos triângulos  $\Delta AXY$ ,  $\Delta XBC$  e  $\Delta CDY$  sejam respectivamente 10, 8 e 9. Determine a área desse retângulo.



**Solução: A área do retângulo é 48.**

Com efeito, sejam  $a = \overline{AB}$ ,  $b = \overline{AD}$ ,  $x = \overline{AX}$  e  $y = \overline{AY}$ , então  $xy = 20$ ,  $a(b-y) = 18$  e  $b(a-x) = 16$ .

Definindo  $x = ta$  e  $y = sb$  obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} st \cdot ab = 20 \\ ab(1-s) = 18 \\ ab(1-t) = 16 \end{cases}$$

Temos então 3 equações com 3 incógnitas  $s$ ,  $t$  e  $ab$  (a área do retângulo).

Resolvendo as equações obtemos  $s = 1 - \frac{18}{ab}$ ,  $t = 1 - \frac{16}{ab}$  e  $\left(1 - \frac{18}{ab}\right)\left(1 - \frac{16}{ab}\right)ab = 20$ .

Assim teremos  $a^2b^2 - 54ab + 288 = 0$  e portanto  $ab = 6$  ou  $ab = 48$ . Mas a área do retângulo é maior do que a soma das áreas dos triângulos, isto é,  $ab > 10 + 8 + 9 = 27$ . Portanto  $ab = 48$ .

Observe que não há como determinar o valor de cada um dos lados, pois podemos arbitrar um valor para  $a$ , tomar  $b = 48/a$ ,  $s = 2/3$  e  $t = 1/3$ , que o retângulo correspondente satisfaz aos dados do problema.

6) Os números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 e 128 estão escritos no quadro. É permitido apagar dois dos números escritos no quadro e escrever no lugar deles a sua diferença (o maior menos o menor). Depois de 7 repetições desse processo apenas um número restará no quadro. É possível que este número seja 97?

**Solução: Sim é possível.**

Escolhendo dois números, escrevendo a diferença do maior menos o menor no lugar deles, fazendo isto 7 vezes, obtemos uma expressão da forma

$$\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 \pm 32 \pm 64 \pm 128 = 97. \quad (1)$$

Passando o número  $\pm 1$  para o segundo membro obtemos

$$\pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 \pm 32 \pm 64 \pm 128 = 97 \mp 1.$$

Como a soma algébrica no primeiro membro dessa igualdade não é um múltiplo de 4, teremos

$$\pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 \pm 32 \pm 64 \pm 128 = 97 + 1 = 98. \quad (2)$$

Isto é, o sinal do número 1 na expressão (1) é negativo.

Dividindo a igualdade (2) por 2 e passando  $\pm 1$  para o segundo membro obtemos

$$\pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 \pm 32 \pm 64 = 49 \mp 1$$

De maneira análoga, como a soma algébrica no primeiro membro dessa igualdade não é um múltiplo de 4, teremos

$$\pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 \pm 32 \pm 64 = 49 + 1 = 50. \quad (3)$$

Portanto o sinal do número 2 na expressão (1) é negativo.

Prosseguindo dessa maneira, e observando que o primeiro membro não fica múltiplo de 4, obtemos sucessivamente

$$\pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 \pm 32 = 25 + 1 = 26 \quad (4)$$

$$\pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 = 13 + 1 = 14 \quad (5)$$

$$\pm 2 \pm 4 \pm 8 = 7 - 1 = 6 \quad (6)$$

$$\pm 2 \pm 4 = 3 - 1 = 2 \quad (7)$$

$$\pm 2 = 1 + 1 = 2 \quad (8)$$

Portanto, os sinais na expressão (1) são respectivamente -, -, -, -, +, +, -.

Assim a única possibilidade para a expressão (1) é

$$97 = -1 - 2 - 4 - 8 + 16 + 32 - 64 + 128.$$

Ou usando apenas o sinal negativo:  $97 = 128 - ((64 - 32) - 16) - 8 - 4 - 2 - 1$ .

A seqüência de números apagados poderia ser:

$$\{64, 32\} \rightarrow 32; \{32, 16\} \rightarrow 16; \{128, 16\} \rightarrow 112; \{112, 8\} \rightarrow 104; \{104, 4\} \rightarrow \{100, 2\} \rightarrow 98; \{98, 1\} \rightarrow 97.$$